DURÉE : 3 heures

L'épreuve consiste en un exercice et deux problèmes indépendants. Il ne semble pas possible de rédiger les trois questions dans le temps imparti. Le candidat traitera avec soin les parties où il se sent le plus à l'aise.

EXERCICE

Une fonction y étant donnée, on essaie de l'approcher par des fonctions polynomiales par morceaux.

1. On se donne quatre nombres réels y_0, y_1, t_0, t_1.
Déterminer le polynôme P de degré ≤ 3 tel que :
$$P(0) = y_0, \quad P(1) = y_1, \quad P'(0) = t_0, \quad P'(1) = t_1.$$

2. *a.* On se donne les réels $(y_i, t_i : i = 0, 1, 2)$.
Déterminer P et Q tels que :
P et Q soient des polynômes de degré ≤ 3 ;
$P(0) = y_0$; $P(1) = Q(0) = y_1$; $Q(1) = y_2$;
$P'(0) = t_0$; $P'(1) = Q'(0) = t_1$; $Q'(1) = t_2$.

b. On désire déterminer les t_i de telle sorte que :
$$P''(0) = 0, \quad P''(1) = Q''(0), \quad Q''(1) = 0.$$
Montrer que de tels t_i sont solutions d'un système $AT = 3Y$ où T est le vecteur de composantes (t_i) et Y le vecteur de composantes $(y_1 - y_0, y_2 - y_0, y_2 - y_1)$. On explicitera la matrice A.

3. On se donne une fonction y définie sur $[-1, +1]$.

a. Montrer qu'il existe une unique fonction u sur $[-1, +1]$ telle que :
i. u est de classe C^2 sur $]-1, +1[$.
ii. La restriction de u à $[-1, 0]$ (resp. à $[0, 1]$) est un polynôme de degré 3.
iii. $u(-1) = y(-1)$; $u(0) = y(0)$; $u(1) = y(1)$;
iv. $u''(-1) = u''(1) = 0$.

b. Déterminer et tracer u lorsque y est donnée par $y(x) = \exp(-x^2)$.

4. *a.* On se donne cinq réels y_i $(i = 0, ..., 4)$.
Montrer qu'il existe quatre polynômes de degré ≤ 3 P_i $(i = 0, ..., 3)$ tels que :
$P_0(0) = y_0$; $P_3(1) = y_4$;
$P_{i-1}(1) = P_i(0) = y_i$ $(i = 1, ..., 3)$;
$P''_0(0) = P''_3(1) = 0$;
$P''_{i-1}(1) = P''_i(0)$ $(i = 1, ..., 3)$.

b. Généraliser le résultat obtenu à la question 3.*a.* et montrer qu'il existe une unique fonction w telle que :
i. w est de classe C^2 sur $]-1, 1[$.
ii. Les restrictions de w aux intervalles $[-1, -1/2]$, $[-1/2, 0]$, $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ sont des polynômes de degré ≤ 3.
iii. $w(x) = y(x)$ pour $x = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$.
iv. $w''(-1) = w''(1) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 1

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}_+^*$. On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions continues définies sur un intervalle [0, T], à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

On note $R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)$, $t \in [0, T]$, r étant une fonction de $\mathscr{C}$ qui est fixée dans tout le problème.

I

À toute fonction c de $\mathscr{C}$ et à tout point x de $\mathbb{R}_+^*$, on associe la solution $y^{x,c}(t)$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(t) = y(t)\,r(t) - c(t)$$

vérifiant la condition initiale :

$$y(0) = x.$$

1. Déterminer, en fonction de R, la solution $y^{x,c}(t)$ de (E).

2. Montrer que $y^{x,c}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si et seulement si

$$(A) \qquad \int_0^T R(s)\,c(s)\,ds \leq x.$$

On note $\mathscr{A}(x)$ l'ensemble des fonctions c de $\mathscr{C}$ qui satisfont à (A), x étant fixé.

II

Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des fonctions U définies sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

(1) U est strictement croissante,

(2) U est de classe C^2,

(3) U" est à valeurs strictement négatives,

(4) $\lim_{x \to 0} U'(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} U'(x) = 0$.

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $U(x) = x^\alpha$ appartienne à $\mathscr{U}$.

2. Soit U appartenant à $\mathscr{U}$.

   a. Montrer qu'il existe une fonction I vérifiant

   $$U'[I(y)] = y \qquad \text{pour tout } y > 0.$$

   b. Vérifier que I est dérivable et strictement décroissante.

   c. Déterminer $\lim_{y \to +\infty} I(y)$ et $\lim_{y \to 0} I(y)$.

3. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$U[I(y)] - yI(y) = \max\{U(s) - ys\,;\, s > 0\}.$$

A SUIVRE

III

Soit γ une fonction de $\mathscr{G}$ et U une fonction de $\mathscr{U}$.

À tout couple $(x, c) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathscr{G})$ on associe :

$$J(x, c) = \int_0^T \Gamma(s)\, U[c(s)]\, ds \quad \text{où } \Gamma(s) = \exp\left(-\int_0^s \gamma(t)\, dt\right).$$

On cherche à déterminer $c^* \in \mathscr{A}(x)$ tel que :

$$J(x, c^*) = \sup\{ J(x, c);\ c \in \mathscr{A}(x) \}.$$

1. Montrer que pour tout couple $(x, c) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathscr{G})$ et pour tout y appartenant à $\mathscr{G}$:

$$J(x, c) \leq \int_0^T \Gamma(s)\, U[I(y(s)]\, ds + \int_0^T \Gamma(s)\, y(s)\{c(s) - I[y(s)]\}\, ds.$$

2. *a.* Montrer que la fonction $\mathscr{X}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\mathscr{X}(\lambda) = \int_0^T R(s)\, I\left[\frac{\lambda R(s)}{\Gamma(s)}\right] ds$$

est strictement décroissante.

b. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que :

$$\forall s \in [0, T], \quad 0 < m \leq \frac{R(s)}{\Gamma(s)} \leq M.$$

c. En déduire que $\mathscr{X}$ satisfait à $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{X}(\lambda) = 0$ et $\lim_{\lambda \to 0} \mathscr{X}(\lambda) = +\infty$.

On admettra que $\mathscr{X}$ est continue.

d. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{X}(\lambda^*) = x$.

3. *a.* Vérifier que c^*, défini par :

$$c^*(s) = I\left[\frac{\lambda^* R(s)}{\Gamma(s)}\right]$$

appartient à $\mathscr{A}(x)$.

b. Montrer que, pour tout c appartenant à $\mathscr{A}(x)$,

$$J(x, c) \leq \int_0^T \Gamma(s)\, U(c^*(s))\, ds.$$

Que pouvez-vous en conclure sur $J(x, c^*)$?

c. Quelle est la valeur de $y^{c^*, x}(T)$?

IV

Déterminer c^* lorsque $U(x) = x^a$. On pourra introduire la constante :

$$K_a = \int_0^T R(s) \left[\frac{R(s)}{\Gamma(s)}\right]^{\frac{1}{a-1}} ds.$$

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des fonctions admettant un développement en série entière de la forme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, où les a_k sont des nombres réels positifs ou nuls tels que $0 < a_0$, $a_0 + a_1 < 1$ et $\sum_{k \geq 0} a_k = 1$, et dont le rayon de convergence est strictement plus grand que 1.

I

Soit f appartenant à $\mathscr{F}$.

1. Montrer que f est C^∞ sur $[0, 1]$, que toutes ses dérivées sont des fonctions croissantes et que f' est strictement croissante.

2. En étudiant $\phi(x) = f(x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ a une seule racine σ dans $[0, 1]$ si $f'(1) \leq 1$, et deux racines σ_1 et σ_2 (avec $0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq 1$) si $f'(1) > 1$. On déterminera σ et σ_2. On notera μ la plus petite racine dans $[0, 1]$ de $f(x) = x$.

II

Soit f une fonction de $\mathscr{F}$. On définit la suite de fonctions f_n sur $[0, 1]$, par : $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$.

1. Montrer que $f_n(0)$ est une suite croissante.
2. Montrer que $f_n(0)$ converge vers μ.
3. Montrer que la suite $\{f_n(x);\ n \geq 1\}$ converge pour tout x appartenant à $[0, 1]$. Quelle est la valeur de la limite ?

III

On considère le cas où $a_k = qp^k$ avec $0 \leq p < 1$ et $q = 1 - p$.

1. Montrer que f appartient à $\mathscr{F}$ et calculer la valeur de $f(s)$, pour tout s appartenant à $[0,1]$.

2. *a.* Montrer que f_n s'écrit sous la forme : $f_n(s) = q\dfrac{\alpha_n - \beta_n ps}{\gamma_n - \delta_n ps}$,

   pour tout s appartenant à $[0, 1]$.

   b. Montrer que les coefficients α_n, β_n, γ_n et δ_n vérifient une équation de récurrence du type $r_{n+2} = r_{n+1} - r_n pq$.

   c. Déterminer explicitement $f_n(s)$, pour tout s appartenant à $[0, 1]$.

   d. Étudier la convergence de la suite $f_n(s)$, pour tout s appartenant à $[0, 1]$.

IV

Soit f une fonction de $\mathscr{F}$. On définit la suite de fonctions h_n sur $[0, 1]$ par : $h_1(s) = sf(s)$, $h_n(s) = sf\left(h_{n-1}(s)\right)$.

1. Montrer que, pour tout s appartenant à $[0, 1]$, la suite $\{h_n(s);\ n \geq 1\}$ est décroissante.

2. Montrer que, pour tout s appartenant à $[0, 1]$, la suite $\{h_n(s);\ n \geq 1\}$ converge. On note $h(s)$ sa limite.

3. Soit s fixé dans $[0, 1[$.

   a. Montrer que l'équation $sf(t) = t$ a au plus une racine dans $[0, 1]$.

   b. Montrer que cette racine est comprise entre 0 et μ.

4. Montrer que h vérifie $h(s) = sf(h(s))$ et $h(s) \leq \mu$ pour s dans $[0, 1[$.

5. Déterminer h dans le cas de l'exemple de la partie III.

FIN